TD 19 : Structures algébriques

Groupes : structure et calcul

1 ★ (*Calcul dans un groupe*) Soit $(G,\cdot)$ un groupe. Développer et simplifier les expressions suivantes, ou résoudre les équations suivantes, avec $a,b,c,d,x \in G$ et $n \in \mathbb{Z}$:

1) $(axa^{-1})^{-1}$
2) $(abcd)^{-1}$
3) $(axa^{-1})^n$
4) $axa^{-1} = b$
5) $a^n x b^n = c$
6) $a^{-1}x^{-1} = b^{-1}$

2 ★ Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(n\mathbb{Z},+)$ est un groupe.

3 ★☆ Soit $(G,\cdot)$ un groupe. On définit le centre de G comme l'ensemble des éléments $a \in G$ qui commutent avec tous les éléments de G, c'est-à-dire :

$$Z(G) := \{a \in G \mid \forall x \in G \quad ax = xa\}$$

Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G. Si G est commutatif, que vaut son centre $Z(G)$?

4 ★☆ On définit sur $\mathbb{R}$ la loi $*$ par $a*b = a+b-ab$.

1) Montrer que $*$ est une l.c.i. associative sur $\mathbb{R}$. Trouver son élément neutre.
2) Est-ce que $(\mathbb{R},*)$ est un groupe ?
3) Déterminer $z \in \mathbb{R}$ tel que $(\mathbb{R}\setminus\{z\},*)$ soit un groupe abélien.

5 ★☆ On note $\mathrm{Bij}(\mathbb{C})$ l'ensemble des bijections de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. On admet que $(\mathrm{Bij}(\mathbb{C}),\circ)$ est un groupe. On pose T l'ensemble des translations de $\mathbb{C}$ et S l'ensemble des similitudes de $\mathbb{C}$:

$$T = \{t_a \mid a \in \mathbb{C}\} \qquad \text{avec} \quad t_a : z \mapsto z+a$$

$$S = \left\{\sigma_{a,b} \,\middle|\, (a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}\right\} \qquad \text{avec} \quad \sigma_{a,b} : z \mapsto az+b$$

Montrer que T et S sont des sous-groupes de $(\mathrm{Bij}(\mathbb{C}),\circ)$.

6 ★★ Soit H un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. Montrer que si $1 \in H$, alors $H = \mathbb{Z}$.

7 ★★ Soit $\cdot$ une l.c.i. sur un ensemble E. On dit que $a \in E$ est absorbant si : $\forall x \in E \quad ax = xa = a$.

1) Montrer que s'il existe un élément absorbant de E, celui-ci est unique.
2) Déterminer l'élément absorbant de $(\mathbb{R},\times)$.
3) Soit X un ensemble. Déterminer l'élément absorbant de $(\mathscr{P}(X),\cup)$ et de $(\mathscr{P}(X),\cap)$.
4) On suppose que $(E,\cdot)$ est un groupe d'élément neutre e et qui possède un élément absorbant a. Montrer que $e = a$, puis $E = \{e\}$.

8 ★★ Soit $*$ la l.c.i. définie sur $\mathbb{R}$ par $x*y = x + e^x y$.

1) Montrer que $*$ admet un élément neutre qu'on notera n.
2) Est-ce que $*$ est commutative ?
3) Est-ce que $*$ est associative ?
4) Quels réels sont symétrisables par $*$?

9 ★★☆ Soit $(G,\cdot)$ un groupe. Soit H et K deux sous-groupes de G.

1) Montrer que $H \cap K$ est un sous-groupe de G.
2) Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.

10 ★★★ On a vu dans un exercice précédent que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$. Réciproquement, si H est un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$, montrer que H est de la forme $n\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{N}$ à déterminer.

Morphismes de groupes

11 ★ Soit $(G,\cdot)$ un groupe d'élément neutre e, et soit $a \in G$. On pose

$$f_a : \begin{array}{l} G \to G \\ x \mapsto ax \end{array} \qquad g_a : \begin{array}{l} G \to G \\ x \mapsto xax \end{array}$$

Déterminer, en fonction de a, si f_a et g_a sont des morphismes, des endomorphismes, des isomorphismes, des automorphismes.

12 ★☆ On pose $E = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et on définit

$$\begin{aligned} * : \quad E \times E &\to E \\ (r_1,\theta_1),(r_2,\theta_2) &\mapsto (r_1 r_2, \theta_1+\theta_2) \end{aligned}$$

Justifier que $(E,*)$ est un groupe. On pose

$$\begin{aligned} \varphi : \quad E &\to \mathbb{C}^* \\ (r,\theta) &\mapsto re^{i\theta} \end{aligned}$$

Montrer que φ est un morphisme de $(E,*)$ dans $(\mathbb{C}^*,\times)$. Déterminer son image et son noyau.

13 ★☆ Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On pose

$$\begin{aligned} \varphi_n : \mathbb{C}^* &\to \mathbb{C}^* \\ x &\mapsto x^n \end{aligned}$$

1) Montrer que φ_n est un endomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$. Est-ce un automorphisme ?
2) En déduire que $\mathbb{U}_n$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$.

14 ★★ Soit $(G,\cdot)$ un groupe d'élément neutre e, et soit $a \in G$. On pose

$$\begin{aligned} \varphi_a : G &\to G \\ x &\mapsto axa^{-1} \end{aligned}$$

1) Montrer que φ_a est un endomorphisme.
2) Soit $a,b \in G$. Montrer que $\varphi_a \circ \varphi_b = \varphi_c$ pour un élément c de G que l'on précisera.
3) En déduire que que φ_a est bijective et déterminer $(\varphi_a)^{-1}$.
4) On pose $Q = \{\varphi_a \mid a \in G\}$. Montrer que $(Q,\circ)$ est un groupe.
5) Montrer que l'application $\Psi : G \to Q$ définie par $\Psi(a) = \varphi_a$ est un morphisme de groupes.
6) On pose $Z(G) = \{a \in G \mid \forall x \in G \quad ax = xa\}$, i.e. $Z(G)$ est l'ensemble des éléments qui commutent avec tous les éléments de G. Déduire, en utilisant la question précédente, que $Z(G)$ est un sous-groupe de G.

Anneaux : structure et calcul

15 ★☆ Soit $(G,+)$ un groupe abélien. On note $\mathrm{End}(G)$ l'ensemble des endomorphismes de G. On définit sur $\mathrm{End}(G)$ les lois $+$ et $\circ$ usuelles : $f+g : x \mapsto f(x)+g(x)$ et $g\circ f : x \mapsto g(f(x))$.

1) Montrer que $(\mathrm{End}(G),+,\circ)$ est un anneau.
2) On note $\mathrm{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes de G. Montrer que $(\mathrm{Aut}(G),\circ)$ est un groupe.

16 ★★ Soit $(A,+,\times)$ un anneau. Un élément $x \in A$ est dit nilpotent lorsqu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = 0_A$.

1) Soit $x,y \in A$. Montrer que si x est nilpotent et x,y commutent, alors xy est nilpotent.
2) Soit $x,y \in A$. Montrer que si x et y sont nilpotents et commutent, alors $x+y$ est nilpotent.
3) Soit $x \in A$ nilpotent. Montrer que $1-x$ est inversible et calculer $(1-x)^{-1}$, où 1 désigne 1_A.

17 ★★ On note $A = \left\{m+n\sqrt{6} \mid m,n \in \mathbb{Z}\right\}$.

1) Montrer que $(A,+,\times)$ est un anneau.
2) On pose $\varphi : A \to A$ définie pour tous $m,n \in \mathbb{Z}$ par $\varphi(m+n\sqrt{6}) = m-n\sqrt{6}$. Montrer que φ est un automorphisme. On pourra notamment calculer $\varphi\circ\varphi$.
3) On pose $N : A \to \mathbb{Z}$ définie pour tout $x \in A$ par $N(x) = x\varphi(x)$. Montrer que pour tous $x,y \in A$, on a $N(xy) = N(x)N(y)$.
4) Soit $x \in A$. Montrer que x est inversible si et seulement si $N(x) = \pm 1$.
5) Vérifier que $5+2\sqrt{6}$ est inversible (dans A) et calculer son inverse.

18 ★★ (*Entiers de Gauss*) On définit l'ensemble des entiers de Gauss par :

$$\mathbb{Z}[i] = \{a+bi \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$$

1) Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ muni des lois $+$ et $\times$ usuelles est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
2) Soit $a+bi$ un entier de Gauss inversible. Montrer que $a^2+b^2 = 1$.
3) En déduire les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.

4) Un entier de Gauss x est dit irréductible si, pour tous $y, z \in \mathbb{Z}[i]$,

$$x = yz \implies \left(y \in \mathrm{Inv}(\mathbb{Z}[i]) \text{ ou } z \in \mathrm{Inv}(\mathbb{Z}[i])\right)$$

Montrer que l'entier 2 est irréductible.

19 ★★★ Soit $(A, +, \times)$ un anneau tel que

$$\forall x \in A \quad x^2 = x$$

Montrer que pour tout $x \in A$, on a $-x = x$. En déduire que A est commutatif.

Anneaux intègres, corps

20 ★★☆ Soit $\mathbb{K}$ l'ensemble des complexes sous la forme $p + iq$ avec $p, q \in \mathbb{Q}$. Montrer que $\mathbb{K}$ est un corps.

21 ★★ Soit $(A, +, \times)$ un anneau intègre fini (i.e. de cardinal fini). Soit $a \in A \setminus \{0_A\}$.

1) Montrer que l'application f_a définie ci-dessous est injective :

$$\begin{aligned} f_a : A &\to A \\ x &\mapsto ax \end{aligned}$$

2) Montrer que $f_a(A)$ et A ont le même nombre d'éléments.
3) Expliquer pourquoi on peut affirmer que $f_a(A) = A$. En déduire que f_a est bijective.
4) En déduire que a est inversible.
5) En déduire que A est un corps.

22 ★★☆ Soit X un ensemble. On définit sur $\mathscr{P}(X)$ la loi de différence symétrique notée Δ par :

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$$

1) Montrer que $(\mathscr{P}(X), \Delta, \cap)$ est un anneau (on pourra admettre l'associativité de Δ...).
2) Cet anneau est-il intègre ? Quels sont les éléments inversibles ?

23 ★★☆ Soit K un sous-corps de $\mathbb{C}$. Montrer que $\mathbb{Q} \subset K$.